

广义 Orlicz 空间的端点

赵 亮, 钟珊珊, 王雯雯, 邵 琛

(哈尔滨理工大学 应用科学学院, 黑龙江 哈尔滨 150080)

摘 要: 在广义 Orlicz 空间中, 引进了一个与 Orlicz 范数和 Luxemburg 范数等价的新范数—— A -范数. 给出了端点的判别准则, 据此得到了广义 Orlicz 空间关于 A -范数严格凸的条件, 还给出了关于 Luxemburg 范数的广义 Orlicz 空间端点的判别条件.

关键词: 广义 Orlicz 空间; 端点; 严格凸

中图分类号: O177.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2014)05-0110-03

Extreme Points of Generalized Orlicz Spaces

ZHAO Liang, ZHONG Shan-shan, WANG Wen-wen, SHAO Chen

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: A new norm which is equivalent to the Orlicz norm and the Luxemburg norm is introduced in generalized Orlicz space. It is called A -norm. The criterion for the extreme points in this space is given, and the conditions for the generalized Orlicz space equipped with the A -norm to be rotund are obtained. In this paper, the criteria for extreme points of generalized Orlicz space with the Luxemburg norm are given.

Key words: generalized Orlicz space; extreme points; rotund

1 引言及预备知识

凸性是 Banach 空间的重要几何性质之一. 很多学者就严格凸、一致凸进行了多方面的研究^[1-4]. 2007 年, JAIN 等^[5]定义了一类广义 Orlicz 空间. 本文对这类广义 Orlicz 空间进一步研究, 在广义 Orlicz 空间中新定义一个 A -范数, 并得到了在 3 种范数下广义 Orlicz 空间的凸性的一些结果.

设 (Ω, Σ, μ) 是 σ -有限完备测度空间, 且 $\mu(\Omega) > 0$, $L^0(\Omega)$ 表示 Ω 上有限实值可测函数等价类构成的空间, 赋范线性空间 $X = \{x \in L^0(\Omega) : \|x\|_X < \infty\}$ 称为 Banach 函数空间(记为 BFS)是指范数 $\|x\|_X$ 满足以下条件:

- 1) $\|x\|_X = 0$ 当且仅当 $x = 0$
- 2) $0 \leq x \leq y(t) \leq y(t)$, a. e. $t \in \Omega \Rightarrow \|x\|_X \leq \|y\|_X$
- 3) $0 < x_n \uparrow x \Rightarrow \|x_n\|_X \uparrow \|x\|_X$
- 4) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \|\chi_E\|_X < \infty$
- 5) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int_E x(t) dt \leq C_E \|x\|_X$ (C_E 是常数)

其中: $E \subset \Omega$, χ_E 表示 E 上的特征函数, C_E 是只与 E 有关的常数.

设函数 $\Phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ 是 Young 函数, Ψ 是 Φ 的余函数, 有 $u \cdot v \leq \Phi(u) + \Psi(v)$, 关于 Young 函数的更多结果见文 [6].

定义 1 设 X 是 BFS, Φ 和 Ψ 为一对互余的 Young 函数, 定义模为 $\rho_\Phi(x) = \|\Phi(|x|)\|_X$, 记广义 Orlicz 类

收稿日期: 2013-09-03

基金项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12541145).

作者简介: 赵 亮(1970—), 男, 教授, 硕士研究生导师. E-mail: zhaoliang@hrbust.edu.cn;

钟珊珊(1987—), 女, 硕士研究生;

王雯雯(1986—), 女, 硕士研究生.

$$\tilde{L}_\phi = \{x \in L^0(\Omega) : \exists \lambda > 0, \rho_\phi(\lambda x) = \|\Phi(|\lambda x|)\|_X < \infty\}$$

赋予

$$\|x\|_\phi^0 = \sup_{\rho_\phi(y) \leq 1} \| |x| \cdot y \|_X, \quad \|x\|_\phi = \inf_{k>0} \left\{ k > 0 : \rho_\phi\left(\frac{|x|}{k}\right) \leq 1 \right\} \text{ 和 } \|x\|_\phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \rho_\phi(kx))$$

范数, 分别称为赋 Orlicz 范数, Luxemburg 范数和 A 范数的广义 Orlicz 空间, 简记为 $(L_\phi^0, \|\cdot\|_\phi^0)$, $(L_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ 和 $(L_\phi^A, \|\cdot\|_\phi^A)$

定理 1 范数 $\|x\|_\phi^0$ 与 $\|x\|_\phi^A$ 等价

证明: $\forall k > 0, \|x\|_\phi^0 = \sup_{\rho_\phi(y) \leq 1} \|xy\|_X =$

$$\frac{1}{k} \sup_{\rho_\phi(y) \leq 1} \|\Phi(kxy)\|_X \leq$$

$$\frac{1}{k} \sup_{\rho_\phi(y) \leq 1} \|\Phi(kx) + \Psi(y)\|_X \leq$$

$$\frac{1}{k} \sup_{\rho_\phi(y) \leq 1} (\|\Phi(kx)\|_X + \|\Psi(y)\|_X) \leq$$

$$\frac{1}{k} (1 + \|\Phi(kx)\|_X),$$

$$\text{所以 } \|x\|_\phi^0 \leq \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \|\Phi(kx)\|_X) = \|x\|_\phi^A$$

另外取 $k = (\|x\|_\phi^0)^{-1} (x \neq 0)$

$$\frac{1}{k} (1 + \|\Phi(kx)\|_X) = \frac{1}{k} \left(1 + \left\| \Phi\left(\frac{x}{\|x\|_\phi^0}\right) \right\|_X \right)$$

$$\text{由于 } \left\| \frac{x}{\|x\|_\phi^0} \right\|_\phi^0 = 1, \text{ 故 } \left\| \Phi\left(\frac{x}{\|x\|_\phi^0}\right) \right\|_X =$$

$$\rho_\phi\left(\frac{x}{\|x\|_\phi^0}\right) \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\phi^0} \right\|_\phi^0 = 1,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{k} (1 + \|\Phi(kx)\|_X) \leq \frac{2}{k} = 2 \|x\|_\phi^0, \text{ 因}$$

此 $\|x\|_\phi^A \leq 2 \|x\|_\phi^0$

综上 $\|x\|_\phi^0 \leq \|x\|_\phi^A \leq 2 \|x\|_\phi^0$, 即范数

$\|x\|_\phi^0$ 与 $\|x\|_\phi^A$ 等价

定义 2 称范数 $\|x\|_\phi^A$ 可达是指: $x \in L_\phi^A, \exists k_0 > 0$, 使得

$$\|x\|_\phi^A = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \rho_\phi(kx)) = \frac{1}{k_0} (1 + \rho_\phi(k_0 x))$$

定义 3 设 F 为 Banach 空间, $x \in S(F)$ 称为端点是指, 如果对任意 $y, z \in B(F), \frac{y+z}{2} = x$, 则 $y = z$.

定义 4 若 Banach 空间 F 单位球面上每一点都是端点, 则称 F 是严格凸的.

2 主要结果

定理 2 范数 $\|x\|_\phi^A$ 可达, $x \in S(L_\phi^A), k_x x \in S_\phi, X$ 严格凸, 则 x 为 $S(L_\phi^A)$ 的端点.

证明: 设 $x \in S(L_\phi^A)$, 若 $y, z \in B(L_\phi^A), x = \frac{y+z}{2}$, 记

$$\|y\|_\phi^A = \frac{1}{k_y} (1 + \|\Phi(k_y y)\|_X)$$

$$\|z\|_\phi^A = \frac{1}{k_z} (1 + \|\Phi(k_z z)\|_X)$$

则有

$$2 \geq \|y\|_\phi^A + \|z\|_\phi^A = \frac{1}{k_y} (1 + \|\Phi(k_y y)\|_X) +$$

$$\frac{1}{k_z} (1 + \|\Phi(k_z z)\|_X) = \frac{k_y + k_z}{k_y k_z} \left(1 + \right.$$

$$\left. \frac{k_z}{k_y + k_z} \|\Phi(k_y y)\|_X + \frac{k_y}{k_y + k_z} \|\Phi(k_z z)\|_X \right) \geq$$

$$\frac{k_y + k_z}{k_y k_z} \left(1 + \left\| \Phi\left(\frac{k_y k_z}{k_y + k_z} (x+y)\right) \right\|_X \right) \geq$$

$$2 \|x\|_\phi^A \left(\frac{k_y k_z}{k_y + k_z} \text{ 为 } x \text{ 的可达点} \right)$$

由于 X 严格凸, $k_x x \in S_\phi$, 所以 $k_y y = k_z z$, 又因为

$$\|y\|_\phi^A = \|z\|_\phi^A = 1, \text{ 故 } k_y = k_z$$

即 $y = z$, 所以 x 为 $S(L_\phi^A)$ 的端点.

推论 1 当 BFS 空间 X 严格凸, $\Phi(x)$ 严格凸时, L_ϕ^A 严格凸.

定理 3 $(X, \|\cdot\|_X)$ 一致凸, $x \in S(L_\phi), \rho_\phi(x) = 1, x(t) \in S_\phi(a, e)$, 则 x 为 $S(L_\phi)$ 的端点.

证明: 设 $x \in S(L_\phi), y, z \in B(L_\phi), x = \frac{y+z}{2}$, 故

$$\rho_\phi(y) \leq 1, \rho_\phi(z) \leq 1$$

所以

$$0 \geq \frac{1}{2} (\rho_\phi(y) + \rho_\phi(z)) - \rho_\phi\left(\frac{y+z}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2} (\|\Phi(y)\|_X + \|\Phi(z)\|_X) -$$

$$\left\| \Phi\left(\frac{y+z}{2}\right) \right\|_X \geq \left\| \frac{\Phi(y) + \Phi(z)}{2} \right\|_X -$$

$$\left\| \Phi\left(\frac{y+z}{2}\right) \right\|_X \geq \left\| \Phi\left(\frac{y+z}{2}\right) \right\|_X -$$

$$\left\| \Phi\left(\frac{y+z}{2}\right) \right\|_X = 0$$

所以

$$\left\| \frac{\Phi(y) + \Phi(z)}{2} \right\|_X = \left\| \Phi\left(\frac{y+z}{2}\right) \right\|_X = \frac{1}{2}(\|\Phi(y)\|_X + \|\Phi(z)\|_X)$$

由于 $(X, \|\cdot\|_X)$ 一致凸, 所以 $\Phi\left(\frac{y+z}{2}\right) \underline{a.e.}$

$\frac{1}{2}(\Phi(y) + \Phi(z))$, 而 $x = \frac{y+z}{2} \in S_\Phi(a, e)$

所以 $y = z, (a, e), x$ 为端点.

参 考 文 献:

- [1] 陈丽丽, 崔云安. 凸函数的凸性 [J]. 哈尔滨商业大学学报, 2007, 6(23): 367-369.
- [2] 崔云安, 王廷辅. Orlicz 空间的强端点 [J]. 数学杂志, 1987, 7(4): 335-340.
- [3] 段丽芬, 崔云安. 赋广义 Orlicz 范数的 Orlicz 空间的强端点 [J]. 浙江大学学报, 2009, 36(1): 6-11.

- [4] CUI Y A, HUDZIK H, LI J J, WISLA M. Strongly Extreme Points in Orlicz Spaces Equipped with the P-Amemiya Norm [J]. Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications, 2009, 12(71): 6343-6364.
- [5] WANG J M, LIU X B, CUI Y A. Local Uniform Rotundity in Musielak-Orlicz Sequence Space Equipped with the Luxemburg Norm [J]. Annales Nnales Societatis Mathematicae Polonae, 2006, 1(1): 131-139.
- [6] CHEN L L, CUI Y A. Complex Midpoint Locally Uniform Rotundity of Musielak-Orlicz Sequence Spaces [J]. Int J Contemp Math Sci, 2007, 17(2): 803-812.
- [7] JAIN P, PERSSON L E, UPRETI P. Inequalities and Properties of Some Generalized Orlicz Classes and Spaces [J]. Acta Math Hungar, 2007, 117(1-2): 161-174.
- [8] CHEN S. Geometry of Orlicz Spaces [M]. Warszawa: Dissertations Math, 1996: 1-204.

(编辑: 温泽宇)